Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Definicija Neka je V vektorski prostor nad poljem F i neka je $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n})$ uređen skup elemenata iz V. Linearna kombinacija od $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n})$ je bilo koji vektor oblika $\vec{w} = c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \dots + c_n\vec{v_n}$ gdje su $c_i \in F$.

1. Data su dva vektora u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ $\vec{v_1} = (1,0,1)$ i $\vec{v_2} = (1,2,0)$. Naći dva vektora $\vec{u}$ koja su linearna kombinacija vektora $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$.

Rj. $\vec{u} = c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2}$ gdje su $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\vec{u} = c_1(1,0,1) + c_2(1,2,0)$

$\vec{u} = (c_1 + c_2, 2c_2, c_1)$

Ako npr. uzmem $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ i $c_1 = -1$, $c_2 = -2$ imam

$\vec{u_1} = (3,4,1)$ i $\vec{u_2} = (-3,-4,-1)$ su vektori koji su linearne kombinacije vektora $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$

$\vec{u_2} = -\vec{v_1} - 2\vec{v_2}$, $\vec{u_1} = \vec{v_1} + 2\vec{v_2}$

2. Data je matrična jednačina $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Vektor $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ izraziti kao linearnu kombinaciju kolona matrice A.

Rj. $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$

$2c_1 - c_2 = 3$

$c_1 - 3c_2 = -1 \quad / \cdot 2$

$2c_1 - c_2 = 3$

$- \; 2c_1 - 6c_2 = -2$

$5c_2 = 5$

$c_2 = 1$

$c_1 - 3c_2 = -1$

$c_1 - 3 = -1$

$c_1 = 2$

Ako uvedem oznake $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ imam $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = 2\vec{a} + \vec{b}$ vektor $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ izražen kao linearna kombinacija kolona matrice A

3. Odrediti vektor $\vec{a}$ koji je linearna kombinacija vektora $\vec{b} = (1,2,-3)$.

Rj. $\vec{a} = \alpha \vec{b}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\vec{a} = \alpha(1,2,-3)$.

Ako uzmemo $\alpha = -2$

$\vec{a} = (-2,-4,6)$ je linearna kombinacija vektora $\vec{b}$.

Definicija Skup svih vektora $\vec{w}$ koji su linearna kombinacija od $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n})$ formiraju podprostor W prostora V koji zovemo podprostor generisan skupom $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n})$. Ovaj podprostor ćemo označavati sa $\operatorname{span} S$ gdje je $S = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n})$. Također kažemo da S razapostire podprostor W.

4. Neka je S podskup vektora vektorskog prostora V, i neka je W podprostor od V. Ako je $S \subseteq W$ tada je $\operatorname{span} S \subseteq W$.

Rj. W je vektorski podprostor. Na osnovu definicije znamo

$\forall(\vec{v_1}, \vec{v_2} \in W)$ $\vec{v_1} + \vec{v_2} \in W$ i $\forall(\vec{v_1} \in W)\ \forall(\alpha \in F)$ $\alpha\vec{v} \in W$

F je neko polje (npr. $F = \mathbb{R}$)

Drugim riječima W je zatvoren pod operacijama sabiranja i skalarnog množenja.

$\operatorname{span} S = \{ \vec{w} \mid \vec{w} = c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \dots + c_n\vec{v_n}$ gdje su $c_i \in F$ i $\vec{v_i} \in S \}$

Ako je $S \subseteq W$ tada je i svaki vektor $\vec{w} \in \operatorname{span} S$ u W

pa je $\operatorname{span} S \subseteq W$.

q.e.d.

Definicija Linearna relacija među vektorima $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ je bilo koja relacija oblika $c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \dots + c_n\vec{v_n} = \vec{0}$ gdje su koeficijenti $c_i \in F$. Za uređen skup vektora $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n})$ kažemo da su linearno nezavisni ako linearna relacija $c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \dots + c_n\vec{v_n} = 0$ vrijedi samo u slučaju kada je $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Skup vektora koji nije linearno nezavisan zovemo linearno zavisan.

Napomena: Iz definicije vidimo da ako je $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n})$ linearno nezavisan skup tada iz jednakosti $c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \dots + c_n\vec{v_n} = \vec{0}$ možemo zaključiti da $c_i = 0$ za svaki $i = 1, 2, \dots, n$.

5. Ako je $\vec{v_1} = \vec{0}$ pokazati da je skup od dva vektora $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ linearno zavisan.

Rj. Posmatramo jednakost $c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} = 0$.

Ako stavimo $c_1 = 1$ i $c_2 = 0$ imamo $\vec{v_1} + 0 \cdot \vec{v_2} = 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ su linearno zavisni.

Ispitati linearnu zavisnost vektora $\vec{a}=(2,3,-4)$, $\vec{b}=(3,-2,0)$ i $\vec{c}=(0,1,1)$.

Rj. $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$

$\alpha(2,3,-4)+\beta(3,-2,0)+\gamma(0,1,1)=(0,0,0)$

$$\begin{aligned} 2\alpha+3\beta &=0\\ 3\alpha-2\beta+\gamma &=0\\ -4\alpha+\gamma &=0 \end{aligned}$$

$$\det M=\begin{vmatrix}2&3&0\\3&-2&1\\-4&0&1\end{vmatrix}\overset{III_v-II_v}{=}\begin{vmatrix}2&3&0\\3&-2&1\\-7&2&0\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)\begin{vmatrix}2&3\\-7&2\end{vmatrix}=(-1)(4+21)=-25$$

$\det M\neq 0$

sistem ima samo trivijalna rješenja ($(0,0,0)$)

Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su linearno nezavisni.

Dokazati da su vektori $\vec{a}=(3,1,8)$, $\vec{b}=(3,4,5)$ i $\vec{c}=(2,3,3)$ linearno zavisni.

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$

$\alpha(3,1,8)+\beta(3,4,5)+\gamma(2,3,3)=(0,0,0)$

$$\begin{aligned} 3\alpha+3\beta+2\gamma&=0\\ \alpha+4\beta+3\gamma&=0\\ 8\alpha+5\beta+3\gamma&=0 \end{aligned}$$

$$\det M=\begin{vmatrix}3&3&2\\1&4&3\\8&5&3\end{vmatrix}\overset{I_v-II_v\cdot 3}{\underset{III_v-II_v\cdot 8}{=}}\begin{vmatrix}0&-9&-7\\1&4&3\\0&-27&-21\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}-9&-7\\-27&-21\end{vmatrix}$$

$$=(-1)(-9)(-7)\begin{vmatrix}1&1\\3&3\end{vmatrix}=0$$

$\det M=0$

rang $M<3$

sistem ima netrivijalna rješenja

Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su linearno zavisni.

Diskutovati linearnu zavisnost vektora $\vec{a}=(3,-8,2)$, $\vec{b}=(7,6,5)$ i $\vec{c}=(5,2,6-\lambda)$ u zavisnosti od parametra λ.

Rj. $\det M=182-74\lambda$

1° $\lambda=\frac{182}{74}$ vektori linearno zavisni

2° $\lambda\neq\frac{182}{74}$ vektori linearno nezavisni

8. Za koju vrijednost parametra p su vektori $\vec{a}_1=(p,-p^2,3)$, $\vec{a}_2=(p-2,1,1)$ i $\vec{a}_3=(-1,p^2+1,-1)$ linearno zavisni? Za najveću dobijenu vrijednost parametra p napisati vektor $\vec{a}_3$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$.

Rj. $\alpha\vec{a}_1+\beta\vec{a}_2+\gamma\vec{a}_3=\vec{0}$

$$M=\begin{bmatrix}p&p-2&-1\\-p^2&1&p^2+1\\3&1&-1\end{bmatrix},\quad \det M=\begin{vmatrix}p&p-2&-1\\-p^2&1&p^2+1\\3&1&-1\end{vmatrix}\overset{II_k+III_k}{\underset{I_k+III_k\cdot 3}{=}}\begin{vmatrix}p-3&p-3&-1\\2p^2+3&p^2+2&p^2+1\\0&0&-1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\begin{vmatrix}p-3&p-3\\2p^2+3&p^2+2\end{vmatrix}=(-1)(p-3)\begin{vmatrix}1&1\\2p^2+3&p^2+2\end{vmatrix}=$$

$$=(p-3)(p^2+2-2p^2-3)\cdot(-1)=(-1)(p-3)(-p^2-1)=(p-3)(p^2+1)$$

Za $p=3$ vektori $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ i $\vec{a}_3$ su linearno zavisni.

$\vec{a}_1=(3,-9,3)$, $\vec{a}_2=(1,1,1)$, $\vec{a}_3=(-1,10,-1)$

$\vec{a}_3=\lambda\vec{a}_1+\omega\vec{a}_2$

$(-1,10,-1)=\lambda(3,-9,3)+\omega(1,1,1)$

$$\Rightarrow\ \begin{aligned} 3\lambda+\omega&=-1\\ -\ \ -9\lambda+\omega&=10\\ \hline 12\lambda&=-11\\ \lambda&=-\frac{11}{12} \end{aligned}\qquad \begin{aligned} 3\lambda+\omega&=-1\\ \omega&=-1+\frac{33}{12}\\ \omega&=\frac{21}{12} \end{aligned}$$

$\vec{a}_3=-\frac{11}{12}\vec{a}_1+\frac{21}{12}\vec{a}_2$

9. Dati su vektori $\vec{a}=(-1,-3,1)$, $\vec{b}=(\lambda,3,4)$ i $\vec{c}=(-5,-9,1)$. Odrediti parametar λ tako da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ budu linearno zavisni, pa izraziti vektor $\vec{a}$ preko vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

10. Dati su vektori $\vec{a}=(m^2+1,m,-2)$, $\vec{b}=(m^2,2,-m)$, $\vec{c}=(-2m-1,0,m+2)$. Odrediti sve vrijednosti parametra m tako da ovi vektori budu linearno zavisni, pa za najveću dobijenu vrijednost parametra m napisati vektor $\vec{a}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

Rj. 9. $\lambda=6$

$\vec{a}=\frac{2}{13}\vec{b}+\frac{5}{13}\vec{c}$

10. $m\in\{-2,0,1,3\}$

$m=3$: $\vec{a}=\frac{3}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

Baza i dimenzije. Računanje sa bazama

Definicija Skup vektora $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ koji su linearno nezavisni i koji generišu vektorski prostor V zovemo baza. Vektorski prostor V je konačno-dimenzionalan ako postoji neki konačno dimenzionalan skup vektora S koji generišu V. Dimenzija konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V je broj vektora u bazi. Dimenziju ćemo označavati sa $\dim V$.

\# Ako je skup $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ baza tada se svaki vektor $\vec{w} \in V$ može napisati na jedinstven način u obliku $\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n$ gdje su $c_i \in F$.

Rj. Pretpostavimo da postoji neki vektor $\vec{w} \in V$ koji se može napisati kao linearna kombinacija na dva načina

$\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n$; $\vec{w} = c_1'\vec{v}_1 + c_2'\vec{v}_2 + \dots + c_n'\vec{v}_n$.

Tada $\vec{0} = \vec{w} - \vec{w} = (c_1 - c_1')\vec{v}_1 + (c_2 - c_2')\vec{v}_2 + \dots + (c_n - c_n')\vec{v}_n$.

Pa kako su $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ linearno nezavisni vektori $\Rightarrow$

$c_1 - c_1' = 0,\ c_2 - c_2' = 0, \dots, c_n - c_n' = 0$ $\Rightarrow$ dvije navedene linearne kombinacije su iste.

Prema tome svaki vektor $\vec{w}$ se može napisati na jedinstven način q.e.d.

\# Date su dvije baze $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$; $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ gdje su $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$ i $\vec{b}_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$. Dat je vektor $\vec{c}$ čije su koordinate $\vec{c} = \begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}$ u odnosu na bazu $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$. Vektor $\vec{c}$ napisati kao linearnu kombinaciju vektora iz baze $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ i pronaći koordinate vektora $\vec{c}$ u odnosu na bazu $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$.

Rj. I način:
Kako su date koordinate vektora $\vec{c}$ u odnosu na bazu $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ imamo $\vec{c} = 3\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3$ ili drugačije napisano

$$\vec{c} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}.$$

Svaki vektor iz $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ se može napisati kao linearna kombinacija vektora iz $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$

$$\vec{a}_1 = p_{11}\vec{b}_1 + p_{21}\vec{b}_2 + p_{31}\vec{b}_3$$
$$\vec{a}_2 = p_{12}\vec{b}_1 + p_{22}\vec{b}_2 + p_{32}\vec{b}_3$$
$$\vec{a}_3 = p_{13}\vec{b}_1 + p_{23}\vec{b}_2 + p_{33}\vec{b}_3$$

ili drugačije napisano

$$(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) \cdot P = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 1 & 0\\2 & 0 & -1\end{bmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\p_{21} & p_{22} & p_{23}\\p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{bmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\1 & 3 & 0\\2 & -1 & 1\end{bmatrix}}_{A}$$

prema tome

$$P = B^{-1} \cdot A$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot (B_{kof})^T \qquad \det B = \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 1 & 0\\2 & 0 & -1\end{vmatrix} \overset{I + III}{=} \begin{vmatrix}3 & 2 & 0\\1 & 1 & 0\\2 & 0 & -1\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{vmatrix} = -1$$

$B_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{vmatrix} = -1$ $\quad B_{21} = (-1)^3\begin{vmatrix}2 & 1\\0 & -1\end{vmatrix} = 2$ $\quad B_{31} = (-1)^4\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{vmatrix} = -1$

$B_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{vmatrix} = 1$ $\quad B_{22} = (-1)^4\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{vmatrix} = -3$ $\quad B_{32} = (-1)^5\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{vmatrix} = 1$

$B_{13} = (-1)^4\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 0\end{vmatrix} = -2$ $\quad B_{23} = (-1)^5\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 0\end{vmatrix} = 4$ $\quad B_{33} = (-1)^6\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{vmatrix} = -1$

$$B_{kof} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & -2\\2 & -3 & 4\\-1 & 1 & -1\end{bmatrix}, \quad (B_{kof})^T = \begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\1 & -3 & 1\\-2 & 4 & -1\end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\-1 & 3 & -1\\2 & -4 & 1\end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\-1 & 3 & -1\\2 & -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\1 & 3 & 0\\2 & -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -5 & 0\\0 & 8 & 0\\0 & -9 & -1\end{bmatrix}$$ matrica za promjenu baze

$$\vec{c} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) \cdot \begin{bmatrix}1 & -5 & 0\\0 & 8 & 0\\0 & -9 & -1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)\begin{bmatrix}-2\\8\\-8\end{bmatrix}$$

$\vec{c} = \begin{bmatrix}-2\\8\\-8\end{bmatrix}$ su koordinate vektora $\vec{c}$ u odnosu na bazu $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$.

II način:
Neka je $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ jedinična baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ tj. $\vec{i} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\vec{j} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{k} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$. Tada je $\vec{a}_1 = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{a}_2 = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{a}_3 = -\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b}_1 = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b}_2 = 2\vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{b}_3 = \vec{i} - \vec{k}$.

$\vec{c} = 3\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3 = (3,3,6) + (2,3,-1) - (-1,0,1) = (6,6,4) = 6\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$

$\alpha\vec{b}_1 + \beta\vec{b}_2 + \gamma\vec{b}_3 = \vec{c}$

$$\begin{aligned}\alpha + 2\beta + \gamma &= 6\\ \alpha + \beta &= 6\\ 2\alpha - \gamma &= 4\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}\alpha &= -2\\ \beta &= 8\\ \gamma &= -8\end{aligned}$$

$\vec{c} = -2\vec{b}_1 + 8\vec{b}_2 - 8\vec{b}_3$ tražene koordinate vektora $\vec{c}$.

4. Dokazati da vektori $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(1,1,1)$ i $\vec{c}=(1,1,2)$ čine bazu vektorskog prostora E^3, pa naći koordinate vektora $\vec{x}=(6,9,14)$ u odnosu na tu bazu.

Rj: Provjerimo da li su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ linearno zavisni.

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$

$$M=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&1\\3&1&2\end{bmatrix}, \quad \det M=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&1\\3&1&2\end{vmatrix} \begin{matrix}II_v-I_v\\ \overline{\overline{III_v-I_v}}\end{matrix} \begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&0\\2&0&1\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

Sistem ima samo trivijalno rješenje, vektori su linearno nezavisni. Vektori čine bazu.

$\vec{x}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$

$(6,9,14)=\alpha(1,2,3)+\beta(1,1,1)+\gamma(1,1,2)$

$\alpha+\beta+\gamma=6$ (1)

$2\alpha+\beta+\gamma=9$ (2)

$3\alpha+\beta+2\gamma=14$ (3)

(1)−(2): $-\alpha=-3$

(3)−(2): $\alpha+\gamma=5$

$\alpha=3, \quad \gamma=2$

$\alpha+\beta+\gamma=6$

$3+\beta+2=6$

$\beta=1$

$\vec{x}=(3,1,2)$ su koordinate vektora $\vec{x}$ u odnosu na bazu E^3.

5. Za koju vrijednost parametra m vektori $\vec{a}=(m,1+m,1-m)$, $\vec{b}=(2m,1-m,1)$ i $\vec{c}=(-2m,m,2m+2)$ čine bazu trodimenzionalnog vektorskog prostora?

Rj: Provjerimo da li su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ linearno zavisni.

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$

$$M=\begin{bmatrix}m&2m&-2m\\1+m&1-m&m\\1-m&1&2m+2\end{bmatrix}, \quad \det M=\begin{vmatrix}m&2m&-2m\\1+m&1-m&m\\1-m&1&2m+2\end{vmatrix} \begin{matrix}II_k+III_k\\ \overline{\overline{III_k+I_k\cdot 2}}\end{matrix}$$

$$=\begin{vmatrix}m&0&0\\1+m&1&3m+2\\1-m&2m+3&4\end{vmatrix}=m\begin{vmatrix}1&3m+2\\2m+3&4\end{vmatrix}=m\left(4-\overbrace{(3m+2)(2m+3)}^{6m^2+13m+6}\right)=$$

$$=m(4-6m^2-13m-6)=m(-6m^2-13m-2)=m\cdot(-6)(m+2)\left(m+\frac{1}{6}\right)$$

$D=169-48=121 \quad x_{1,2}=\frac{13\pm 11}{-12} \quad x_1=-2 \quad x_2=-\frac{2}{12}=-\frac{1}{6}$

Za $m\neq 0$, $m\neq -2$ i $m\neq -\frac{1}{6}$ vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ čine bazu trodimenzionalnog vektorskog prostora.

6. Ako je $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ jedna baza vektorskog prostora V_3, dokazati da i vektori $\vec{b}_1=\vec{a}_1+3\vec{a}_2$, $\vec{b}_2=-5\vec{a}_1+\vec{a}_2+4\vec{a}_3$ i $\vec{b}_3=2\vec{a}_1+2\vec{a}_2+6\vec{a}_3$ takođe čine bazu prostora V_3 i izraziti vektor $\vec{c}=11\vec{a}_1+3\vec{a}_2+14\vec{a}_3$ preko vektora baze $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.

Rj. $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ baza vektorskog prostora

$\vec{b}_1=(1,0,3)$, $\vec{b}_2=(-5,1,4)$, $\vec{b}_3=(2,2,6)$ koordinate vektora $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ u odnosu na bazu $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$

Provjerimo da li su vektori $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ i $\vec{b}_2$ linearno zavisni.

$\alpha\vec{b}_1+\beta\vec{b}_2+\gamma\vec{b}_3=\vec{0}$

$$M=\begin{bmatrix}1&-5&2\\0&1&2\\3&4&6\end{bmatrix}, \quad \det M=\begin{vmatrix}1&-5&2\\0&1&2\\3&4&6\end{vmatrix} \overline{\overline{III_k-II_k\cdot 2}} \begin{vmatrix}1&-5&12\\0&1&0\\3&4&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&12\\3&-2\end{vmatrix}=-38$$

$\det M\neq 0$. Vektori $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ i $\vec{b}_3$ su linearno nezavisni, pa oni takođe čine bazu prostora V_3.

$\vec{c}=(11,3,14)$ koordinate vektora $\vec{c}$ u odnosu na bazu $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$

$\vec{c}=\alpha\vec{b}_1+\beta\vec{b}_2+\gamma\vec{b}_3$

$(11,3,14)=\alpha(1,0,3)+\beta(-5,1,4)+\gamma(2,2,6)$

$\alpha-5\beta+2\gamma=11$ (1)

$\beta+2\gamma=3$ (2)

$3\alpha+4\beta+6\gamma=14$ (3)

(1)−(2): $\alpha-6\beta=8$ (I)

(3)−(2)·3: $3\alpha+\beta=5$ (II)

(I)+6·(II): $19\alpha=38$

$\alpha=2$

$3\alpha+\beta=5$

$6+\beta=5$

$\beta=-1$

$\beta+2\gamma=3$

$-1+2\gamma=3$

$\gamma=2$

$\vec{c}=2\vec{b}_1-\vec{b}_2+2\vec{b}_3=(2,-1,2)$ vektor $\vec{c}$ izražen preko vektora baze $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.

7. Date su dvije baze vektorskog prostora E^3 $B_1=\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ i $B_2=\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ gdje su $\vec{a}_1=(1,1,2)$, $\vec{a}_2=(2,3,-1)$, $\vec{a}_3=(-1,0,1)$ i $\vec{b}_1=(1,1,2)$, $\vec{b}_2=(2,1,0)$ i $\vec{b}_3=(1,0,-1)$. Dat je vektor $\vec{x}$ u odnosu na bazu B_1 $\vec{x}=(2,3,-4)$ odnosno $\vec{x}=2\vec{a}_1+3\vec{a}_2-4\vec{a}_3$. Odrediti koordinate vektora $\vec{x}$ u odnosu na bazu B_2.

Rj. $\vec{x}=(3,8,-7)$

(#) Dati su vektori $\vec{a}=(3m+3,\ 1,\ m+5)$, $\vec{b}=(3m-4,\ 3m-2,\ -2)$, $\vec{c}=(3-3m,\ 2-3m,\ 1)$. Odrediti sve vrijednosti parametra m tako da ovi vektori budu linearno zavisni, pa za najveću dobijenu vrijednost parametra m napisati vektor $\vec{a}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

Rj. Vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ su linearno zavisni ako postoje skalari α, β, γ, bar jedan različit od nule, takvi da $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0$.

$$\alpha(3m+3,\ 1,\ m+5)+\beta(3m-4,\ 3m-2,\ -2)+\gamma(3-3m,\ 2-3m,\ 1)=0$$

$$\begin{aligned}(3m+3)\alpha+(3m-4)\beta+(3-3m)\gamma&=0\\ \alpha+(3m-2)\beta+(2-3m)\gamma&=0\\ (m+5)\alpha-2\beta+\gamma&=0\end{aligned}$$

Ovaj (homogeni) sistem ima netrivijalna rješenja akko je $D=0$.

$$D=\begin{vmatrix}3m+3 & 3m-4 & 3-3m\\ 1 & 3m-2 & 2-3m\\ m+5 & -2 & 1\end{vmatrix}\overset{II_k+III_k}{=\!=}\begin{vmatrix}3m+3 & -1 & 3-3m\\ 1 & 0 & 2-3m\\ m+5 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$\overset{I_v-III_v}{=\!=}\begin{vmatrix}2m-2 & 0 & 2-3m\\ 1 & 0 & 2-3m\\ m+5 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2m-2 & 2-3m\\ 1 & 2-3m\end{vmatrix}\overset{I_v-II_v}{=\!=}\begin{vmatrix}2m-3 & 0\\ 1 & 2-3m\end{vmatrix}$$

$=(2m-3)(2-3m)$ $\quad D=0$ akko $m=\frac{3}{2}$ ili $m=\frac{2}{3}$

$\frac{3}{2}>\frac{2}{3} \Rightarrow m=\frac{3}{2}$: $\vec{a}=\left(\frac{9}{2}+3,\ 1,\ \frac{3}{2}+5\right)=\left(\frac{15}{2},\ 1,\ \frac{13}{2}\right)$

$\vec{b}=\left(\frac{9}{2}-4,\ \frac{9}{2}-2,\ -2\right)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2},\ -2\right)$ $\quad \vec{c}=\left(3-\frac{9}{2},\ 2-\frac{9}{2},\ 1\right)=\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2},\ 1\right)$

$\vec{a}=\mu\vec{b}+\eta\vec{c}$ – razlaganje vektora $\vec{a}$ preko vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$

Pronađimo vrijednosti μ i η.

$$\left(\frac{15}{2},\ 1,\ \frac{13}{2}\right)=\mu\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2},\ -2\right)+\eta\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2},\ 1\right)$$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\mu-\tfrac{3}{2}\eta&=\tfrac{15}{2}\\ \tfrac{5}{2}\mu-\tfrac{5}{2}\eta&=1\\ -2\mu+\eta&=\tfrac{13}{2}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mu=-\frac{69}{10},\ \eta=-\frac{73}{10}$ $\quad \vec{a}=\frac{-69\vec{b}-73\vec{c}}{10}$ $\quad$ sistem riješiti za vježbu

...

(#) Odrediti parametar λ tako da vektori $\vec{a}=\lambda\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\lambda\vec{j}$ i $\vec{c}=3\lambda\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ budu komplanarni pa za tako dobijeno λ razložiti vektor $\vec{a}$ preko vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

Rj. $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0$ uslov komplanarnosti

$$\alpha(\lambda,1,4)+\beta(1,-2\lambda,0)+\gamma(3\lambda,-3,4)=(0,0,0)$$

$$\begin{aligned}\lambda\alpha+\beta+3\lambda\gamma&=0\\ \alpha-2\lambda\beta-3\gamma&=0\\ 4\alpha+4\gamma&=0\end{aligned}$$

sistem, α, β i γ su nepoznate

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 3\lambda\\ 1 & -2\lambda & -3\\ 4 & 0 & 4\end{vmatrix}\overset{III_k-I_k}{=\!=}\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 2\lambda\\ 1 & -2\lambda & -4\\ 4 & 0 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=4\begin{vmatrix}1 & 2\lambda\\ -2\lambda & -4\end{vmatrix}=4\cdot 2\begin{vmatrix}1 & 2\lambda\\ -\lambda & -2\end{vmatrix}=8\cdot 2\begin{vmatrix}1 & \lambda\\ -\lambda & -1\end{vmatrix}$$

$D=16(-1+\lambda^2)=16(\lambda^2-1)$

Za $\lambda=\pm 1$ imamo da je $D=0 \Rightarrow$ sistem ima beskonačno mnogo rješenja (za $\lambda=\pm1$).

Za $\lambda=\pm1$ vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ su komplanarni. Uzmimo da je $\lambda=1$:

$\vec{a}=(1,1,4)$
$\vec{b}=(1,-2,0)$
$\vec{c}=(3,-3,4)$

$\vec{a}=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}$

$$\alpha(1,-2,0)+\beta(3,-3,4)=(1,1,4)$$

$$\begin{aligned}\alpha+3\beta&=1\\ -2\alpha-3\beta&=1\\ 4\beta&=4\end{aligned}\qquad \begin{aligned}\beta&=1\\ \alpha+3&=1\\ \alpha&=-2\end{aligned}$$

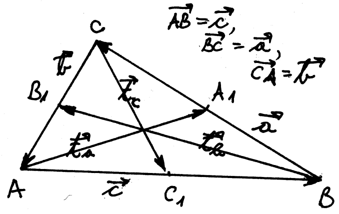
za $\lambda=1$ $\quad \vec{a}=-2\vec{b}+\vec{c}$ $\quad$ razlaganje vektora $\vec{a}$ preko vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$

Za $\lambda=-1$ vektor $\vec{a}$ razložen preko vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$:

$$\vec{a}=2\vec{b}+\vec{c}$$

(#) Stranice trougla su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$. Pomoću ovih vektora izraziti težišne linije trougla (vidi sliku).

Rj.



$\vec{AB}=\vec{c}$, $\vec{BC}=\vec{a}$, $\vec{CA}=\vec{b}$

Težišna linija je duž koja spaja tjeme trougla sa sredinom stranice naspram tog tjemena.

$\vec{t}_a=\vec{AA_1}=\vec{AB}+\vec{BA_1}=\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}$

$\vec{t}_a=\vec{AA_1}=\vec{AC}+\vec{CA_1}=-\vec{CA}+\frac{1}{2}\vec{BC}=-\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$

Za vježbu: $\vec{t}_b=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}=-\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$, $\quad \vec{t}_c=\vec{b}-\vec{c}=-\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}$

(#) Dati su vektori $\vec{a}=(m^2+1, m, -2)$, $\vec{b}=(m^2, 2, -m)$, $\vec{c}=(-2m-1, 0, m+2)$. Odrediti sve vrijednosti parametra m tako da ovi vektori budu linearno zavisni, pa za najveću dobijenu vrijednost parametra m napisati vektor $\vec{a}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

Rj. Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su linearno zavisni ako postoji bar jedan nenula skalar α, β ili γ takav da je

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$ tj.

$$\begin{aligned}(m^2+1)\alpha + m^2\beta + (-2m-1)\gamma &= 0\\ m\alpha + 2\beta + 0\gamma &= 0\\ -2\alpha + (-m)\beta + (m+2)\gamma &= 0\end{aligned}$$

Ovo je homogeni sistem.

Za $D=0$ sistem ima netrivijalnih rješenja.

$$D=\begin{vmatrix} m^2+1 & m^2 & -2m-1\\ m & 2 & 0\\ -2 & -m & m+2\end{vmatrix} = -m\begin{vmatrix} m^2 & -2m-1\\ -m & m+2\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} m^2+1 & -2m-1\\ -2 & m+2\end{vmatrix} =$$

$$= -m\left(m^3+2m^2-(2m^2+m)\right)+2\left(m^3+2m^2+m+2-(4m+2)\right) =$$

$$= -m(m^3-m)+2(m^3+2m^2-3m) = -m^2(m^2-1)+2m(m^2+2m-3) =$$

$D=4+12=16$

$m_{1,2}=\frac{-2\pm4}{2}$

$m_1=\frac{-6}{2}=-3$

$m_2=\frac{2}{2}=1$

$$= m\left[-m(m-1)(m+1)+2(m-1)(m+3)\right] = m(m-1)\left[-m(m+1)+2(m+3)\right] =$$

$$= m(m-1)(-m^2-m+2m+6) = m(m-1)(-m+m+6) = -m(m-1)(m+2)(m-3)$$

$D=0$ akko $m=0$ ili $m=1$ ili $m=-2$ ili $m=3$

Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su linearno zavisni ako $m\in\{-2,0,1,3\}$

Za $m=3$: $\vec{a}=(10,3,-2)$, $\vec{b}=(9,2,-3)$ i $\vec{c}=(-7,0,5)$

$\vec{a}=\mu\vec{b}+\omega\vec{c}$

$(9\mu, 2\mu, -3\mu)+(-7\omega, 0, 5\omega)=(10,3,-2)$

$$\begin{aligned}9\mu-7\omega&=10\\ 2\mu+0&=3\\ -3\mu+5\omega&=-2\end{aligned}$$

$\mu=\frac{3}{2}$

$-\frac{9}{2}+5\omega=-2 \quad /\cdot 2$

$-9+10\omega=-4$

$10\omega=5$

$\omega=\frac{1}{2}$

$\vec{a}=\frac{3}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

vektor $\vec{a}$ razložen preko vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$

Razvijmo determinantu D i na drugi način:

$$D=\begin{vmatrix} m^2+1 & m^2 & -2m-1\\ m & 2 & 0\\ -2 & -m & m+2\end{vmatrix} \underset{=}{\overset{I_R+III_R}{=}} \begin{vmatrix} m^2-1 & m^2-m & -m+1\\ m & 2 & 0\\ -2 & -m & m+2\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (m-1)(m+1) & m(m-1) & -(m-1)\\ m & 2 & 0\\ -2 & -m & m+2\end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} m+1 & m & -1\\ m & 2 & 0\\ -2 & -m & m+2\end{vmatrix} \overset{I_K+III_K}{=}$$

$$=(m-1)\begin{vmatrix} m & m & -1\\ m & 2 & 0\\ m & -m & m+2\end{vmatrix} = m(m-1)\begin{vmatrix} 1 & m & -1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & -m & m+2\end{vmatrix} \underset{III_R-II_R}{\overset{I_R-II_R}{=}}$$

$$= m(m-1)\begin{vmatrix} 0 & m-2 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & -m-2 & m+2\end{vmatrix} = -m(m-1)\begin{vmatrix} m-2 & -1\\ -(m+2) & m+2\end{vmatrix} = -m(m-1)(m+2)\begin{vmatrix} m-2 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$= -m(m-1)(m+2)(m-2-1) = -m(m-1)(m+2)(m-3)$$